Фурре Е

Очерк истории элементарной геометрии

Снимокъ со страницы древней рукописи „Началъ" Евклида

Урокъ математики въ Греціи.

БИБЛІОТЕКА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ
подъ общей редакціей приватъ-доцента С. О. ШАТУНОВСКАГО
2

Е. ФУРРЕ

ОЧЕРКЪ ИСТОРІИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ

Переводъ съ французскаго
А. И. БАКОВА

СЪ 5 РИСУНКАМИ

MATHESIS
ОДЕССА
1912

ОДЕССА
Типографія подъ фирмою „Вѣстникъ Винодѣлія“.
Большая Арнаутская, домъ № 38.
1912

Очеркъ исторіи элементарной геометріи

Несомнѣнно, что въ тотъ день, когда потребность въ комфортѣ и въ украшеніи заставила насъ возводить для себя сколько-нибудь сложныя постройки, въ тотъ день, когда чувство собственности привело къ разграниченію, измѣренію и раздѣленію полей, въ этотъ же день и должна была родиться практическая геометрія. Данныя, восходящія къ отдаленной древности, подтверждаютъ это предположеніе.

Но тогда рѣчь шла еще лишь о *техническихъ пріемахъ*, не связанныхъ другъ съ другомъ, образующихъ *искусство*, но не *науку*. Чтобы отсюда перейти къ изученію свойствъ фигуръ самихъ по себѣ, независимо отъ какого бы то ни было отношенія ихъ къ внѣшнему міру, оставалось сдѣлать большой и трудный шагъ. Этотъ огромный прогрессъ, имѣвшій неисчислимыя послѣдствія во всѣхъ областяхъ человѣческой дѣятельности, былъ осуществленъ философскимъ геніемъ грековъ; созданіе теоретической геометріи есть одна изъ главныхъ заслугъ этого столь замѣчательнаго народа.

И, наконецъ, уже въ наше время была установлена тѣсная связь между геометріей и счисленіемъ, связь, приведшая въ области математики къ важнымъ открытіямъ, слѣдовавшимъ, начиная съ 16-го вѣка.

БИБЛІОГРАФІЯ

Montucla. — *Histoire des Mathématiques.* Paris, 2e édit., 1799-1802 4 vol. in-4o.

Chasles. — *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie.* Bruxelles, 1837; Paris, 1875, in-4o.

Hankel. — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* Leipzig, 1874, gr. in-8o.

Cantor. — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig, 2e Aufl., 1894-1901, 3 B-de gr. in-8o.
Zeutgen (Trad. française de J. Mascart). — *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.* Paris, 1902, in-8o.

§ 1.—Древній Востокъ

Практическая геометрія.

Египтяне. — Если вѣрить греческимъ историкамъ, геометрія родилась въ Египтѣ. А именно, Геродотъ (5-й вѣкъ до Р. X.) разсказываетъ (книга II, 109), что Сезострисъ „произвелъ раздѣленіе земель, предоставивъ каждому египтянину квадратный участокъ земли; участки были распредѣлены по жребію, но съ обязательствомъ выплачивать ежегодно опредѣленный налогъ, который и составлялъ доходъ Сезостриса. Если рѣка (Нилъ) размывала у кого-нибудь часть его участка, то потерпѣвшій отправлялся къ царю и сообщалъ ему, что съ нимъ случилось. Тогда царь посылалъ на мѣсто *землемѣровъ* опредѣлить, насколько участокъ уменьшился, съ тѣмъ, чтобы налогъ уплачивался лишь съ оставшейся части. Здѣсь, я думаю, и лежитъ начало геометріи, которая потомъ перешла изъ этой страны въ Грецію“. Отъ этого разсказа нѣсколько отличается версія, передаваемая Діодоромъ Сицилійскимъ (1-й вѣкъ до Р. X.) и Прокломъ (5-й вѣкъ): къ землемѣрамъ приходилось прибѣгать послѣ каждаго разлитія Нила, чтобы возстановить смытыя границы земельныхъ участковъ.

Если понимать слово *геометрія* въ его этимологическомъ смыслѣ, какъ *землемѣріе,* то, судя по дошедшимъ до насъ памятникамъ, египтяне, несомнѣнно, были довольно искусны въ этомъ дѣлѣ. Съ другой стороны, ихъ *гарпедонапты* („натягиватели веревки“), которые по издавна установленнымъ обрядовымъ правиламъ должны были оріентировать постройку храмовъ по меридіану, употребляли извѣстные практическіе пріемы, которые до насъ не дошли, но несомнѣнно были аналогичны пріемамъ, описаннымъ въ индусскихъ Сульвасутрахъ (Çulvasûtras, § 4). Но ничто до настоящаго времени не даетъ повода думать, что египтяне создали умозрительную геометрію; можно развѣ догадываться, что они владѣли ея основными элементами, да и то лишь въ интуитивной формѣ.

Изъ достовѣрныхъ документовъ, позволяющихъ судить о степени математическаго развитія египтянъ, въ первую очередь можно привести знаменитый папирусъ Ринда, находящійся въ коллекціяхъ Британскаго Музея въ Лондонѣ и переведенный въ 1879 году нѣмецкимъ египтологомъ Айзенлоромъ. Онъ представляетъ собой *Руководство къ счисленію* для торговцевъ и землемѣровъ, составленное по еще болѣе древнимъ источникамъ приблизительно въ 1700 - 2000 г. до нашей эры писцомъ по имени Ахмесъ. Геометрическая часть заключаетъ въ себѣ приближенныя рѣшенія практическихъ задачъ, относящихся къ вычисленію нѣкоторыхъ плоскихъ площадей и простѣйшихъ объемовъ; встрѣчаются также указанія, относящіяся къ подобію фигуръ.

Второй памятникъ, на который мы можемъ здѣсь указать, это — іероглифическая надпись въ храмѣ Гора въ Эдфу (Верхній Египетъ), изученная въ 1855 г. нѣмецкимъ египтологомъ Лепсіусомъ. Эта надпись, сдѣланная приблизительно за 100 лѣтъ до Р. Х., перечисляетъ размѣры различныхъ участковъ земли, принадлежавшихъ этому храму. Въ ней мы находимъ правила для приближеннаго вычисленія площадей треугольниковъ и четыреугольниковъ.

Отмѣтимъ, наконецъ, что у египтянъ, кромѣ геометрическихъ фигуръ, часто встрѣчающихся на ихъ памятникахъ, было еще знакомство съ такъ называемымъ способомъ квадратовъ для увеличенія или уменьшенія фигуры въ данномъ отношеніи.

БИБЛІОГРАФІЯ

Eisenlohr. — *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter.* Leipzig, 1877, 1 Band in-4° et 1 Atlas in-fol.

Lepsius. — *Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu.* Mem. d. Berliner Akad., 1855.

Халдеи. — Долгое время Египетъ разсматривался, какъ единственная колыбель науки; но открытія и изслѣдованія, сдѣланныя впервые въ серединѣ прошлаго вѣка и съ тѣхъ поръ непрерывно расширявшіяся, доказали, что народы, населявшіе область Тигра и Ефрата, достигли степени культуры, по меньшей мѣрѣ, столь же высокой. Правда, до сихъ поръ не найдено еще ни одного систематическаго сочиненія по математикѣ въ этихъ странныхъ библіотекахъ, гдѣ книги состоятъ изъ глиняныхъ плитокъ и цилиндровъ, покрытыхъ клинообразными письменами; но все же несомнѣнно, что халдеи, подобно египтянамъ, были искусными архитекторами и землемѣрами; планы построекъ и земель, а также безчисленные документы, касающіеся продажи полей, сохранившіеся до нашего времени, не оставляютъ на этогъ счетъ никакого сомнѣнія.

Ихъ система мѣръ и вѣсовъ подобно нашей была основана на научныхъ данныхъ. Нужно сказать, впрочемъ, что истинный характеръ этой системы и значенія ея различныхъ единицъ не вполнѣ еще выяснены; этотъ вопросъ составлялъ и теперь еще составляетъ предметъ самыхъ оживленныхъ споровъ среди ассиріологовъ.

Намъ очень мало извѣстно относительно геометрическихъ познаній халдеевъ помимо практическихъ вопросовъ черченія и землемѣрія; мы отмѣтимъ, во всякомъ случаѣ, что у нихъ было извѣстное представленіе о подобіи фигуръ, и что имъ слѣдуетъ приписать шестидесятичное дѣленіе окружности. Геометрическія фигуры, повидимому, употреблялись ими и для гаданія.

БИБЛІОГРАФІЯ

Lenormant. — *Essai sur un document mathematique chaldeen.* Paris, 1868.

J. Oppert. — Различныя сочиненія, напечатанныя въ „Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres“.

Sayce. — *Babylonian augury by means of geometrical figures.* – Transact. of the Soc. of Biblical Archæology, vol. IV. London, 1876.

Heuzey. — *Découvertes en Chaldée.* Paris, 1884, in-fol.

Aurès. — *Théorie de l'arpentage chez les Assyriens.* S. l. n. d., in-4°.

Aurès. — *Détermination des mesures agraires de longueur et de superficie autrefois en usage chez les Assyriens.* Nîmes, 1891, in-8°.

Китайцы. — Самый древній изъ дошедшихъ до насъ подлинныхъ памятниковъ, не носящій слѣдовъ иностраннаго вліянія, есть „священная книга счисленія" *Чеу-пей*, раздѣленная на двѣ части. Первая, очень короткая и составленная, должно быть, около 1100 года до Р. Х., содержитъ почти одинъ лишь слѣдующій результатъ: треугольникъ со сторонами, соотвѣтственно равными 3, 4, 5, есть прямоугольный треугольникъ, и въ этомъ треугольникѣ

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вторая часть, составленная, по крайней мѣрѣ, въ 213 году до Р. Х., относится уже къ астрономіи. Въ общемъ, какъ бы ни смотрѣли на эту книгу сами китайцы, видящіе въ ней основу математическихъ познаній всѣхъ народовъ, *Чеу-пей* даетъ незавидное представленіе о древней китайской наукѣ.

Болѣе позднія сочиненія, написанныя въ эпоху, когда уже могло проявиться вліяніе индусовъ и арабовъ, но не европейскихъ миссіонеровъ, суть *Су-чоу-кіу-чангъ* или *Девять подраздѣленій численнаго искусства* (около 1240 г.) *и Суан-фа-тонг-цонгъ* или *Полный трактатъ объ искусствѣ счета* (1593 г.); въ нихъ содержатся лишь простые вопросы практической геометріи.

БИБЛІОГРАФІЯ

Ed. Biot.— *Traduction et examen du Tcheou-pei.* J[al] Asiat., 1[er] sem. 1841.

Ed. Biot. — *Table générale du Souan-fa-tong-tsong.* J[al] Asiat., 1[er] sem. 1839.

Biernatzki. — *Die Arithmetik der Chinesen.* J[al] für d. reine und ang. Mathem. (Crelle), tome 52. Berlin, 1856.

§ 2.—Греки

Теоретическая геометрія.

Все, что мы знаемъ достовѣрнаго относительно возникновенія геометріи въ Греціи, заимствовано почти исключительно изъ краткихъ замѣчаній, встрѣчающихся въ комментаріи Прокла (5-й вѣкъ) къ первой книгѣ *Началъ* Евклида; составлены они по *Исторіи геометріи* Евдема (4-й вѣкъ до Р. Х.).

Въ остальномъ приходится довольствоваться догадками, основанными на отдѣльныхъ цитатахъ у различныхъ греческихъ или латинскихъ авторовъ.

БИБЛIОГРАФIЯ

Bretschneider.— *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* Leipzig 1870, gr. in-8°.

Paul Tannery. — *La Geometrie grecque.* Paris, 1887, gr. in-8°.

Gino Loria.— *Le Scienze esatte nell' antica Grecia.* Modena, 1895, iu-fol.

Zeuten (Trad. française de J. Mascart). — *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.* Paris, 1902, in-8°.

Предвѣстникъ. — Какъ первый греческiй геометръ и философъ извѣстенъ Θалесъ Милетскiй (между 627 и 547 г.г. до Р. Х.). Свѣдѣнiя о его жизни скудны и противорѣчивы; но можно считать почти достовѣрнымъ, что онъ былъ въ Египтѣ.

По Проклу Θалесъ высказалъ слѣдующiя теоремы:

1. Если двѣ прямыя пересѣкаются, то углы, противоположные относительно вершины (т. е. вертикальные), равны.

2. Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основанiи равны.

3. Треугольникъ вполнѣ опредѣляется одной стороной и двумя прилежащими къ ней углами.

Евдемъ приписываетъ эту теорему Θалесу, такъ какъ „онъ необходимо долженъ былъ ею пользоваться, судя по тому способу, которымъ онъ, какъ передаютъ, опредѣлялъ разстоянiе между кораблями въ морѣ“.

4. Дiаметръ круга дѣлитъ его на двѣ равныя части.

Весьма сомнительно, что Θалесъ, какъ это утверждаетъ Проклъ, *доказалъ* эту послѣднюю теорему, такъ какъ въ то время геометрическiя понятiя не были еще развиты настолько, чтобы могла чувствоваться необходимость доказательства. Даже Евклидъ довольствуется тѣмъ, что высказываетъ этотъ фактъ въ одномъ изъ опредѣленiй.

Памфила, писательница-компиляторъ конца 1-го вѣка, сообщаетъ, что Θалесъ „вписалъ прямоугольный треугольникъ въ полукругъ“. Изъ этого указанiя часто заключаютъ, что

Ѳалесъ долженъ былъ уже знать, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ. Но это заключеніе мало правдоподобно, такъ какъ Проклъ ясно приписываетъ эту теорему пиѳагорейцамъ; болѣе вѣроятно, что Ѳалесъ вывелъ чисто практически это свойство прямоугольнаго треугольника изъ того факта, что въ кругъ можно вписать прямоугольникъ.

Наконецъ, Плутархъ (1-й вѣкъ) сообщаетъ, что Ѳалесъ привелъ въ восхищеніе египетскаго царя тѣмъ, что безъ всякихъ приборовъ измѣрилъ высоту пирамиды; онъ якобы произвелъ это измѣреніе, сравнивъ тѣнь пирамиды съ тѣнью вертикальнаго шеста извѣстной длины, пользуясь, слѣдовательно, двумя подобными треугольниками. Но мы имѣемъ всѣ основанія думать, что теорія подобія появилась уже послѣ Ѳалеса; Іеронимъ Родосскій (4-й вѣкъ до Р. Х.) разсказываетъ, что измѣреніе, о которомъ идетъ рѣчь, было произведено въ тотъ моментъ дня, когда „наша тѣнь равна намъ по длинѣ“. Тутъ, очевидно, есть лишь интуитивное представленіе о пропорціональности, въ родѣ того, которое встрѣчается у египтянъ.

Въ общемъ — таково мнѣніе Поля Таннери — Ѳалесъ, повидимому, занимался преимущественно практическими вопросами; быть можетъ, онъ владѣлъ и кое-какими теоретическими познаніями, но дальнѣйшаго развитія онъ имъ не далъ.

Школа Пиѳагора. — Послѣ Ѳалеса первый замѣчательный человѣкъ, котораго приходится отмѣтить, это — Пиѳагоръ. Хотя біографіи этого знаменитаго философа и многочислены, мы, въ сущности, не знаемъ почти ничего достовѣрнаго о его жизни, ставшей, въ концѣ концовъ, достояніемъ легенды. Онъ родился въ Самосѣ около 580 г. и умеръ около 500 г. Всѣ авторы согласно говорятъ, что онъ совершилъ путешествіе въ Египетъ. Около 536 г. онъ поселился въ Италіи въ Кротонѣ, гдѣ основалъ знаменитую школу, носившую его имя. Онъ, повидимому, пользовался большимъ политическимъ и соціальнымъ вліяніемъ въ Великой Греціи, но такъ какъ его ученіе сдѣлало его приверженцемъ аристократіи, то ему пришлось бѣжать предъ демократической оппозиціей; онъ уморилъ себя голодомъ въ храмѣ музъ въ Метапонтѣ. Пиѳагорейскія общества распались, и члены ихъ разсѣялись.

Несомнѣнно, что именно Пиѳагору и его школѣ мы обязаны первымъ толчкомъ къ развитію геометріи, а также и открытіемъ основныхъ теоремъ этой науки. Трудно только выдѣлить то, что принадлежитъ самому Пиѳагору и его непосредственнымъ ученикамъ, такъ какъ у пиѳагорейцевъ было обыкновеніе приписывать всѣ свои открытія главѣ школы.

Прежде всего, Пиѳагору мы обязаны знаменитой теоремой о квадратѣ гипотенузы. По свидѣтельству Прокла, онъ доказалъ слѣдующія положенія:

1. Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.

2. Совокупность шести равностороннихъ треугольниковъ, или четырехъ квадратовъ, или трехъ шестиугольниковъ вполнѣ заполняетъ плоскость вокругъ одной точки.

Эта послѣдняя теорема предполагаетъ у Пиѳагора знакомство съ нѣкоторыми свойствами правильныхъ многоугольниковъ. Съ другой стороны, по сообщенію греческаго писателя Лукіана (2-й вѣкъ) и одного схоліаста Аристофана, извѣстно, что звѣздчатый правильный пятиугольникъ служилъ знакомъ принадлежности къ пиѳагорейскому союзу. Изъ того, что опредѣленіе стороны этого пятиугольника сводится, какъ извѣстно, къ раздѣленію радіуса въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (*золотое сѣченіе*, какъ называли его въ прежнія времена), заключали, что пиѳагорейцы должны были знать рѣшеніе этой послѣдней задачи.

Къ тому же порядку идей относится сообщеніе Прокла о томъ, что Пиѳагоръ построилъ *космическія* фигуры. Такъ назывались пять правильныхъ многогранниковъ, которые, по ученію школы пиѳагорейцевъ и другихъ развившихся изъ нея школъ, находятся въ необходимой связи съ окружающимъ насъ міромъ. У пиѳагорейца Тимея изъ Локръ (4-й вѣкъ до Р. Х.) тетраэдръ, напримѣръ, представлялъ огонь, кубъ — землю, октаэдръ — вѣтеръ, икосаэдръ — воду, додекаэдръ — оболочку міра.

Теорія подобія также съ успѣхомъ разрабатывалась въ пиѳагорейской школѣ, такъ какъ Плутархъ отмѣчаетъ, что Пиѳагоръ далъ рѣшеніе слѣдующей задачи: „Построить фигуру, равновеликую одной данной фигурѣ и подобную другой“.

Мы знаемъ еще по свидѣтельству Прокла, что Пиѳагору мы обязаны важнымъ открытіемъ ирраціональныхъ чиселъ: онъ доказалъ, что отношеніе между гипотенузой и катетомъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника или, что сводится къ тому же, между діагональю и стороной квадрата не можетъ быть выражено никакимъ извѣстнымъ числомъ (цѣлымъ или дробнымъ; это отношеніе представляется при нашихъ нынѣшнихъ обозначеніяхъ выраженіемъ $\sqrt{2}$).

Чтобы избавиться отъ необходимости разсматривать ирраціональныя числа въ математическихъ разсужденіяхъ, пиѳагорейцы и вслѣдъ за ними греческіе геометры придумали способъ изображать величины отрѣзками прямой. Эти отрѣзки, численное значеніе которыхъ могло быть какимъ угодно, такъ какъ оно зависѣло отъ выбранной единицы длины, играли такимъ образомъ ту же роль, что буквы въ алгебрѣ; отсюда беретъ начало то, что было названо геометрической алгеброй.

Въ общемъ мы видимъ, что въ моментъ разсѣянія пиѳагорейскаго союза уже было намѣчено большинство теорій, составляющихъ предметъ элементарной геометріи.

Изъ независимыхъ геометровъ, не примыкающихъ къ пиѳагорейской школѣ, можно назвать Энопида изъ Хіоса (5-ый в. до Р. Х.), Гиппократа изъ Хіоса (средина 5-го вѣка до Р. Х.) и Демокрита (460—357).

По Проклу Энопидъ рѣшилъ двѣ слѣдующія задачи:

1. Опустить изъ данной точки перпендикуляръ на данную прямую.

2. Построить уголъ, равный данному, если даны вершина и одна сторона угла.

Что касается знаменитаго философа Демокрита, то ни одно изъ его сочиненій не дошло до насъ, но мы знаемъ, что онъ написалъ *Курсъ геометріи.* Въ одномъ сохранившемся отрывкѣ онъ похваляется тѣмъ, что въ области математическаго доказательства его не превзошелъ никто, даже египетскіе гарпедонапты.

Гиппократъ Хіосскій — одинъ изъ наиболѣе славныхъ греческихъ геометровъ. Онъ началъ съ занятія морской торговлей; но однажды, считая себя обманутымъ аѳинской таможней въ Византіи, пріѣхалъ искать справедливости въ Аѳинахъ. Чтобы заполнить досугъ, онъ сталъ посѣщать уроки философовъ и кончилъ тѣмъ, что основалъ собственную школу.

Проклъ сообщаетъ, что Гиппократъ первый написалъ (математическія) *Начала*. Особенно прославился онъ изученіемъ луночекъ, носящихъ его имя; анализъ этой части его труда, сдѣланный историкомъ Евдемомъ, сохраненъ для насъ писателемъ 5-го вѣка Симплиціемъ. Весьма вѣроятно, что нашему геометру мы обязаны и теоремой о томъ, что площади круговъ пропорціональны квадратамъ ихъ діаметровъ.

Три знаменитыхъ проблемы, занятіе которыми было чрезвычайно плодотворно для науки, были поставлены именно во времена Гиппократа: квадратура круга, удвоеніе куба и трисекція угла.

Академія. — Мы подходимъ къ самому блестящему періоду греческой философіи, однимъ изъ славнѣйшихъ представителей котораго былъ Платонъ (427—348 до Р. Х.). Послѣ путешествія по Италіи и Сициліи, гдѣ онъ собралъ пиѳагорейскія доктрины, онъ основалъ въ Аѳинахъ знаменитую Академію — школу, которая быстро достигла пышнаго расцвѣта и сохраняла его до самой смерти своего основателя.

Платонъ былъ далекъ отъ того пренебреженія къ математикѣ, которое выказывалъ его учитель Сократъ, полагавшій, что достаточно „знать геометрію настолько, чтобы умѣть измѣрить свое поле". Дѣйствительно, Проклъ говоритъ, что Платонъ „далъ сильнѣйшій толчекъ къ развитію математики вообще и въ частности геометріи, благодаря тому интересу, который Платонъ всегда проявлялъ къ ней, и о которомъ достаточно свидѣтельствуютъ его сочиненія, полныя бесѣдъ на темы изъ области математики и пробуждающія постоянно рвеніе къ этой наукѣ у тѣхъ, кто отдается философіи". Преданіе, сохраненное византійскимъ авторомъ 11-го вѣка нашей эры Пселломъ, сообщаетъ еще, что Платонъ сдѣлалъ надпись на фронтонѣ своей Академіи: „Нѣтъ входа тому, кто не геометръ".

Лично Платонъ не занимается математическими изслѣдованіями, но онъ побуждаетъ къ тому своихъ учениковъ. Если вѣрить преданію, онъ особенно интересовался методами. Проклъ сообщаетъ, что онъ изобрѣлъ аналитическій методъ доказательства, состоящій, какъ извѣстно, въ томъ, что данная теорема посредствомъ ряда предложеній сводится къ уже извѣстному предложенію. Но несомнѣнно, что этотъ методъ употреблялся по крайней мѣрѣ въ примитивной формѣ, еще до него, а именно Гиппократомъ Хіосскимъ; быть можетъ Платонъ лишь придалъ этому методу неуязвимую научную форму.

Насколько можно догадываться, геометры Академіи придали болѣе точную форму опредѣленіямъ, уменьшили число аксіомъ, усовершенствовали доказательства уже извѣстныхъ предложеній и открыли много новыхъ теоремъ. Нѣкоторыя изъ этихъ предложеній составили *Начала*, которыя не должны были значительно отличаться отъ написанныхъ впослѣдствіи Евклидомъ.

Здѣсь умѣстно будетъ упомянуть Аристотеля (384—322 до Р. Х.), великаго греческаго философа, ученика Платона; Аристотель составилъ недошедшій до насъ *Курсъ математики*. Его ученики Теофрастъ (374—287) и Евдемъ (350—290) написали каждый *Исторію геометріи*, которыя не сохранились.

Кромѣ геометровъ Академіи слѣдуетъ отмѣтить Архита изъ Тарента (ок. 430 — ок. 348 до Р. Х.), философа и государственнаго дѣятеля, друга Платона; онъ особенно прославился приписываемыми ему различными механическими изобрѣтеніями, но равнымъ образомъ съ успѣхомъ занимался геометріей.

Евдоксъ Книдскій (407—354 до Р. Х.), соперничавшій съ Платономъ, былъ основателемъ Кизикійской школы. Онъ особенно извѣстенъ, какъ астрономъ, но ему принадлежатъ также и замѣчательныя работы по геометріи. А именно онъ далъ строгую теорію пропорцій и, по словамъ Архимеда, точныя доказательства для выраженій объема пирамиды и конуса.

По Проклу Менехмъ (4-й вѣкъ до Р. Х.), одновременно ученикъ Платона и Евдокса, открылъ коническія сѣченія (эллипсъ, параболу, гиперболу).

Александрійская школа. — 1-й періодъ. Основанная въ 331 г. великимъ завоевателемъ, имя котораго она носитъ, Александрія подъ просвѣщеннымъ управленіемъ Птоломеевъ быстро стала центромъ умственной жизни античнаго міра. Въ частности математика разрабатывалась тамъ съ величайшимъ рвеніемъ. Это былъ золотой вѣкъ греческой геометріи; на протяженіи приблизительно одного столѣтія слѣдуютъ одинъ за другимъ три ея наиболѣе блестящихъ представителя: Евклидъ, Архимедъ и Аполлоній.

Евклидъ училъ въ Александріи около начала 3-го вѣка до Р. Х. въ царствованіе Птоломея I-го; онъ основалъ тамъ самую знаменитую изъ греческихъ математическихъ школъ. Особенно прославился составленіемъ *Началъ*, въ которыхъ „онъ привелъ въ порядокъ работы своихъ предшественниковъ и далъ неопровержимыя доказательства того, что его предшественники недостаточно доказали" (Проклъ). О его жизни неизвѣстно ничего достовѣрнаго. Геометръ 4-го вѣка нашей эры Паппъ рисуетъ намъ его, какъ человѣка мягкаго и скромнаго характера. Проклъ, съ другой стороны, разсказываетъ, что Птоломей, спросившій однажды у Евклида, нѣтъ ли въ геометріи болѣе короткаго пути, чѣмъ его *Начала*, получилъ отвѣтъ: „Въ геометріи нѣтъ путей, проложенныхъ спеціально для царей". (По другой, менѣе распространенной версіи этотъ отвѣтъ былъ данъ Менехмомъ Александру Великому).

Независимо отъ *Началъ* Евклидъ написалъ еще различныя сочиненія по элементарной и высшей геометріи, въ большинствѣ не дошедшія до насъ. Изъ сохранившихся сочиненій укажемъ книгу *Data (Данныя)*, сборникъ, предназначенный для облегченія рѣшенія задачъ. Что касается книги *О дѣленіи фигуръ*, то изъ нея извѣстно лишь извлеченіе, опубликованное и переведенное Вёпке въ 1851 г. Въ 1563 г. Джономъ Ди было открыто арабское сочиненіе съ такимъ же самымъ заглавіемъ, носящее имя автора Магомета изъ Багдада; онъ принялъ его за сочиненіе Евклида и сдѣлалъ переводъ его на латинскій языкъ, который и вошелъ въ изданіе Евклида Грегори 1703 г. Но это сочиненіе не было, повидимому, соста-

Евклида Александрійскаго, знаменитаго автора *Началъ*, часто смѣшивали съ Евклидомъ изъ Мегары. Къ одному старинному изданію *Началъ* приложенъ портретъ ихъ автора съ подписью „Евклидъ изъ Мегары". Мы даемъ здѣсь этотъ портретъ, сохранивъ подпись.

влено непосредственно на греческомъ языкѣ и, несомнѣнно, есть лишь подражаніе творенію александрійскаго геометра.

Наконецъ, мы знаемъ, что Евклидъ составилъ еще *Pseudaria* (*Ложные Выводы*), въ которыхъ онъ „изложилъ отдѣльно и въ порядкѣ различные виды ложныхъ разсужденій, упражняя для каждаго изъ нихъ нашъ умъ при помощи теоремъ всякаго рода, гдѣ онъ противополагаетъ истинное ложному и гдѣ наряду съ доказательствомъ онъ приводитъ и опроверженіе заблужденія“ (Проклъ).

Въ виду исторической важности *Началъ*, мы остановимся на нихъ нѣсколько подробнѣе. Въ томъ видѣ, какъ они дошли до насъ, *Начала* содержатъ 15 книгъ. Только первыя 13 принадлежатъ Евклиду; что касается двухъ другихъ, трактующихъ о правильныхъ многогранникахъ, то XIV-ая написана Гипсиклесомъ, жившимъ въ слѣдующемъ столѣтіи, а XV-ая, по мнѣнію Поля Таннери, византійскимъ геометромъ 6-го вѣка.

I-ая книга трактуетъ объ элементарныхъ построеніяхъ, о случаяхъ равенства треугольниковъ и ихъ свойствахъ, о параллельныхъ линіяхъ, о равновеликости при извѣстныхъ условіяхъ треугольниковъ и параллелограммовъ, о квадратѣ гипотенузы.

Во II-ой книгѣ изложены геометрическія доказательства нѣкоторыхъ алгебраическихъ соотношеній, въ родѣ того, которое получается при возведеніи въ квадратъ суммы двухъ чиселъ, а также рѣшеніе задачи о дѣленіи прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Въ III-ей книгѣ содержится теорія круга и различныхъ линій, съ нимъ связанныхъ; по содержанію она приблизительно соотвѣтствуетъ 2-му отдѣлу нашихъ современныхъ учебниковъ геометріи.

Въ IV-й книгѣ изучаются фигуры, вписанныя въ окружность и описанныя около нея.

V-я книга цѣликомъ посвящена теоріи пропорцій.

Подобіе фигуръ изложено въ VI-й книгѣ при помощи теоремъ предыдущей книги. Нѣкоторые вопросы, нынѣ рѣшаемые путемъ разсмотрѣнія подобныхъ треугольниковъ, трактуются въ первыхъ четырехъ книгахъ безъ ссылки на подобіе при помощи искусственныхъ пріемовъ, основанныхъ часто на теоремѣ о квадратѣ гипотенузы и на теоремахъ II-й книги.

Книги VII-я, VIII-я и IX-я излагаютъ теорію чиселъ и книга X-я — теорію несоизмѣримыхъ величинъ.

Въ XI-й книгѣ мы опять возвращаемся къ геометріи; здѣсь изложены свойства прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ и свойства параллелепипедовъ.

Наконецъ, XII-я книга трактуетъ о пирамидѣ, конусѣ и цилиндрѣ и XIII-я — о правильныхъ многоугольникахъ и многогранникахъ.

Каждая геометрическая теорема въ *Началахъ* содержитъ вообще пять слѣдующихъ частей: 1) условіе; 2) изложеніе, которое есть, собственно, лишь повтореніе условія, но съ буквенными обозначеніями фигуръ; 3) построеніе вспомогательныхъ линій, необходимыхъ для доказательства; 4) доказательство; 5) заключеніе, которое есть опять лишь повтореніе условія. Само доказательство построено, какъ строго логическая цѣпь разсужденій съ непремѣнными ссылками при каждомъ построеніи и при каждомъ шагѣ впередъ на предшествующія опредѣленія или теоремы.

Но такой торжественный способъ изложенія вызываетъ, въ концѣ концовъ, въ читателѣ утомленіе, которое дѣлаетъ изученіе Евклида мало привлекательнымъ занятіемъ и которое еще усугубляется тѣмъ обстоятельствомъ, что древніе, какъ мы видѣли, разсуждали о величинахъ самихъ по себѣ, представленныхъ геометрически, а не о числахъ, которыя ихъ измѣряютъ. Благодаря этому, разсужденія древнихъ получали полную всеобщность, но чтеніе затруднялось тѣмъ, что приходилось слѣдить одновременно и за текстомъ и за чертежемъ; кромѣ того, такимъ путемъ древніе сами лишали себя той точности, какую даетъ вычисленіе.

На томъ же основаніи въ *Началахъ* мы не найдемъ, какъ въ нашихъ нынѣшнихъ учебникахъ геометріи, теоремъ, дающихъ явнымъ образомъ площадь фигуръ и объемъ тѣлъ, въ родѣ, напримѣръ, слѣдующей: „Площадь параллелограмма измѣряется произведеніемъ числа, измѣряющаго его основаніе, на число, измѣряющее его высоту, если за единицу площади принять площадь квадрата, построеннаго на единицѣ длины“. Мы найдемъ тамъ лишь такую теорему: „Два параллелограмма, имѣющіе одинаковую высоту, относятся, какъ ихъ основанія“. Вычисленіе площадей и объемовъ входило у грековъ въ составъ практической геометріи, кореннымъ образомъ отличной отъ теоретической геометріи.

Какъ бы то ни было, *Начала* Евклида представляютъ такой образецъ научной точности, что немного наберется современныхъ сочиненій, которыя могли бы быть поставлены наряду съ ними. Въ теченіе двадцати вѣковъ во всемъ цивилизованномъ мірѣ *Начала* были par excellence классическимъ руководствомъ для преподаванія геометріи; теперь, впрочемъ, можно констатировать общую тенденцію вернуться къ методамъ Евклида.

Начала были переданы намъ арабами. Ателардъ изъ Бата, затѣмъ Жераръ изъ Кремоны и, наконецъ, Кампанусъ сдѣлали въ 12-мъ и 13-мъ вѣкахъ первые латинскіе переводы съ арабскаго текста. Переводъ Кампануса — первый, который былъ напечатанъ, — былъ изданъ въ Венеціи въ 1482 г. Эргардомъ Ратдольтомъ и съ тѣхъ поръ часто перепечатывался. Первый переводъ съ греческаго текста появился въ Венеціи въ 1505 г. благодаря стараніямъ Цамберти. Наиболѣе новымъ является изданіе Гейберга (Лейпцигъ, 1883—1888). Послѣдній французскій переводъ съ греческимъ и латинскимъ текстомъ принадлежитъ Пейрару; появился онъ въ 1814—1818 г.г.*).

Самый великій математикъ древности Архимедъ (ок. 287—212 г. до Р. Х.) родился въ Сиракузахъ; если вѣрить Плутарху, онъ былъ родственникомъ царя Гіерона. Весьма вѣроятно, что онъ учился въ Александріи.

---

*) Въ 1908 г. появилось очень хорошее англійское изданіе Евклида, принадлежащее Гису — „The thirteen books of Euclid's Elements“ traslated from the text of Heiberg by T. L. Heath — въ 3-хъ томахъ. Изданіе содержитъ очень много полезныхъ комментаріевъ, литературныхъ и историческихъ свѣдѣній, и т. д. Эта книга, вѣроятно, надолго сдѣлается классическимъ изданіемъ Евклида. *Прим. ред.*

Его защита Сиракузъ противъ римлянъ, осаждавшихъ Сиракузы подъ начальствомъ Марцелла, стала достояніемъ легенды. Полибій, Титъ Ливій и Плутархъ не устаютъ разсказывать объ удивительныхъ созданныхъ изобрѣтательнымъ геніемъ Архимеда машинахъ, которыя позволили ему въ теченіе трехъ лѣтъ сдерживать натискъ римской арміи. Въ концѣ концовъ, Марцеллу удалось взять городъ неожиданнымъ штурмомъ, и во время нападенія Архимедъ былъ убитъ однимъ солдатомъ. На его могилѣ, согласно его желанію, былъ вырѣзанъ рисунокъ, изображающій шаръ, вписанный въ цилиндръ, для напоминанія объ одномъ изъ его прекраснѣйшихъ открытій. Въ 75 г. до Р. Х. Цицеронъ, бывшій тогда квесторомъ въ Сициліи, нашелъ его могилу уже заросшей сорной травой (Тускуланскія бесѣды, V).

Глубоко оригинальный умъ Архимеда не любилъ избитыхъ тропинокъ; вопросы, которыми онъ занимается, не изучались до него никѣмъ, и для достиженія своихъ цѣлей онъ употребляетъ свои собственные методы. До насъ дошли слѣдующія работы его по элементарной геометріи.

Въ книгѣ *Объ измѣреніи круга* онъ установилъ, что отношеніе длины окружности къ діаметру заключается между $3^{10}/_{71}$ и $3^{1}/_{7}$. Трактатъ *О шарѣ и цилиндрѣ* содержитъ двѣ книги. Въ немъ Архимедъ доказываетъ между прочимъ: 1) что поверхность шара равна учетверенной площади одного изъ его большихъ круговъ; 2) что поверхность и объемъ шара — относятся соотвѣтственно къ поверхности и объему описаннаго около него цилиндра, какъ 2 къ 3. Собраніе *Леммъ*, которымъ мы располагаемъ лишь въ арабскомъ изложеніи, содержитъ много интересныхъ предложеній. Наконецъ, великій греческій геометръ является еще изобрѣтателемъ геометрической игры, извѣстной подъ именемъ *loculus Archimedius*.

Со временъ Архимеда элементарная геометрія, какъ мы понимаемъ ее теперь, была окончательно установлена. Въ самомъ дѣлѣ, въ нее уже входило все содержаніе *Началъ* Евклида, измѣреніе круга и шара, а также свойства сферическихъ фигуръ, которыя изучались древними, какъ составная часть астрономіи, и несомнѣнно были извѣстны во времена сиракузскаго геометра.

Аполлоній, котораго греки называли „великимъ геомеромъ“, родился въ Перги, въ Памфиліи, и жилъ въ Александріи около конца 3-го и начала 2-го вѣка до Р. Х. Паппъ описываетъ его характеръ въ мало привлекательныхъ чертахъ.

Главное сочиненіе Аполлонія — большой трактатъ о *Коническихъ сѣченіяхъ* въ 8 книгахъ, изъ которыхъ только 7 дошли до насъ. Аполлоній объединяетъ работы своихъ предшественниковъ въ одно однородное цѣлое, затѣмъ излагаетъ свои собственныя изслѣдованія съ той глубиной взгляда, которая возбуждала восхищеніе геометровъ Возрожденія — эпохи, когда были опубликованы первые переводы его трудовъ. Кромѣ *Коническихъ сѣченій* Аполлоній написалъ еще нѣсколько различныхъ трудовъ по геометріи, большая часть которыхъ не дошла до насъ. Сюда относятся утерянныя двѣ книги о *Касаніяхъ;* въ нихъ онъ излагаетъ рядъ задачъ о проведеніи окружностей, касательныхъ къ даннымъ прямымъ или другимъ окружностямъ. Это сочиненіе было возстановлено Віетомъ въ 1600 г.

Мы знаемъ, наконецъ, по различнымъ указаніямъ Прокла, на которыя обратилъ вниманіе Поль Таннери, что Аполлоній Пергейскій предпринялъ пересмотръ *Началъ* Евклида, а именно въ отношеніи опредѣленій и аксіомъ.

2-й періодъ. — Послѣ этой блестящей эпохи греческой геометріи ученые обращаются уже преимущественно къ прикладной математикѣ, въ особенности къ астрономіи. Намъ придется отмѣтить лишь нѣсколько замѣчательныхъ именъ.

Ѳеодосій (1-й вѣкъ до Р. Х. ?) и Менелай (конецъ 1-го вѣка) написали сочиненія подъ заглавіями *Sphaerica*; въ этихъ сочиненіяхъ они излагаютъ свойства фигуръ, построенныхъ на сферѣ; наиболѣе элементарныя изъ этихъ свойствъ были несомнѣнно извѣстны еще и раньше.

Когда жилъ Геронъ Александрійскій, въ точности неизвѣстно. Этотъ часто обсуждавшійся вопросъ до сихъ поръ еще не разрѣшенъ: но по послѣднимъ изслѣдованіямъ надо полагать, что жилъ онъ ужъ послѣ нашей эры.

Геронъ написалъ комментарій къ *Началамъ* Евклида, но до насъ дошли лишь отрывки этого комментарія; главныя же заслуги Герона относятся уже къ области практической геометріи. Въ *Трактатѣ о діоптрикѣ* онъ описываетъ усовершествованный инструментъ, аналогичный нашему теодолиту, который служилъ одновременно и для нивеллировки и для снимания плановъ; кромѣ того, онъ даетъ тамъ рѣшеніе различныхъ задачъ, могущихъ представиться землемѣру въ полѣ.

Съ другой стороны было извѣстно со словъ Евтокія, математика 6-го вѣка, что Геронъ написалъ книгу подъ заглавіемъ *Metrica;* насчетъ ея содержанія были высказаны самыя различныя предположенія, опровергнутыя находкой рукописи въ Константинополѣ въ 1896 г. *Metrica* содержатъ три книги: первая посвящена измѣренію плоскихъ и круглыхъ поверхностей, вторая — измѣренію объемовъ и третья — задачамъ на дѣленіе поверхностей и объемовъ; доказательства Герона хорошо построены и кратки, въ противоположность великимъ ученымъ перваго періода.

Наконецъ, сохранились еще подъ общимъ названіемъ *Героновскаго Собранія* различные сборники, составленные, по всей вѣроятности, въ 10-мъ вѣкѣ нашей эры въ Константинополѣ и содержащіе, главнымъ образомъ, практическія указанія относительно измѣренія поверхностей и объемовъ. Они были изданы Гульчемъ въ 1864 г. До середины 19-го вѣка эти сочиненія, въ которыхъ много ошибокъ, разсматривались, какъ византійскія, но послѣ опубликованія въ 1854 г. замѣчательнаго мемуара Т. Г. Мартена, заключенія котораго были приняты и развитыКанторомъ въ его лекціяхъ по исторіи математики, утвердилось мнѣніе, что эти сочиненія суть лишь неудачныя компиляціи изъ самихъ *Metrica* и что въ нихъ содержится существенное изъ этого послѣдняго сочиненія; а такъ какъ въ нихъ находили слѣды египетскаго вліянія, то отсюда заключали, что Геронъ лишь собралъ и усовершенствовалъ практическіе пріемы, бывшіе въ употребленіи на берегахъ Нила. Опубликованіе Константинопольской рукописи доказало неточность этихъ заключеній: *Metrica* есть вполнѣ оригинальное и чисто греческое произведеніе.

Несомнѣнно, византійскіе геодезисты использовали сочиненіе Герона, но въ псевдо-героновскомъ сборникѣ находится также много правилъ, которыя не были даны александрійскимъ геометромъ. Вопреки тому, что принималось раньше, приходится, слѣдовательно, заключить, что византійцы не довольствовались рабскимъ копированіемъ математическихъ произведеній древности.

Одинъ изъ величайшихъ греческихъ астрономовъ Птолемей (2-й вѣкъ) — авторъ сочиненія *Syntaxis Mathematica*, болѣе извѣстнаго подъ названіемъ *Альмагестъ;* это замѣчательное сочиненіе, въ которомъ методически изложены всѣ астрономическія познанія древности, содержитъ нѣсколько интересныхъ геометрическихъ выводовъ и, въ частности, теорему о соотношеніи между діагоналями и сторонами вписаннаго четыреугольника. Мы знаемъ, кромѣ того, что Птолемей написалъ недошедшую до насъ книгу объ основаніяхъ геометріи.

Отъ Паппа, жившаго, по всей вѣроятности, около начала 4-го вѣка, осталось важное сочиненіе *Математическій Сборникъ* въ 8 книгахъ, изъ которыхъ первая и часть второй утеряны. Наряду съ оригинальными изслѣдованіями онъ излагаетъ и работы предшествовавшихъ ему геометровъ; въ этомъ отношеніи *Сборникъ* Паппа есть драгоцѣнный источникъ для сужденія о тѣхъ изъ этихъ работъ, которыя не дошли до насъ.

Ѳеону Александрійскому (конецъ 4-го вѣка), отцу знаменитой Гипатіи, принадлежитъ наиболѣе распространенное въ рукописяхъ изданіе Евклида; кромѣ того, онъ комментировалъ Альмагестъ.

Знаменитый философъ-неоплатоникъ Проклъ (412—485) является авторомъ обширнаго комментарія къ *Началамъ* Евклида; отъ этого комментарія осталось лишь то, что имѣетъ отношеніе къ первой книгѣ. Эта работа интересна лишь въ томъ отношеніи, что въ ней заключается наибольшая часть тѣхъ свѣдѣній, которыми мы обладаемъ относительно исторіи греческой геометріи.

Наконецъ, Евтокій (6-й вѣкъ) составилъ незначительные сами по себѣ, но цѣнные съ исторической точки зрѣнія комментаріи къ книгамъ Архимеда объ измѣреніи круга, о шарѣ и о цилиндрѣ, и къ *Коническимъ сѣченіямъ* Аполлонія.

БИБЛІОГРАФІЯ

F. Peyrard. — *Les Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français.* Paris, 1814-1818. 3 vol. in-4°.

I.-L. Heiberg et. H. Menge. — *Euclidis opera omnia.* B-e I — VII. Leipzig, 1883-96, in-8°.

F. Peyrard. — *Œuvres d'Archimède* (traduites par). Paris, 1807, in-4°.

I.-L. Heiberg. — *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.* Leipzig, 1880-81, 3 B-e in-8°.

I.-L. Heiberg.— *Apollonii Pergæi quæ Græce exstant cum commentaris antiquis.* Leipzig, 1890-93, 3 vol. in-8°.

A.-J.-H. Vincent. — *Traité de la Dioptre par Héron d'Alexandrie.* Not. et Ext. des Mss. d. I. Bibl. Nat., tome 19, 2e pie, 1858.

Th. H. Martin. — *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie.* Mém. d. l'Ac. d. Inscr. et Bell.-Lett., 1re série, tome IV, 1854.

Paul Tannery. — Études nombreuses sur Héron et la Collection héronienne dans divers recueils.

H. Schöne. — *Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra.* Leipzig, 1903, in-8°.

F. Hultsch. — *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ.* Berlin, 1864, in-8°.

Abbé Halma. — *Composition mathématique de Claude Ptolémée.* Paris, 1813-16, 2 vol. in-4°.

F. Hultsch. — *Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt e libris manu scriptis...* Berlin, 1875-78, 3 vol. in-8°.

G. Friedlein. — *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii.* Leipzig, 1873, in-8°.

§ 3.—Римляне

„Agrimensores".

„Геометрія пользовалась у грековъ величайшимъ почетомъ; да и ничего не было болѣе блестящаго, чѣмъ ихъ математика. У римлянъ же значеніе этого искусства было ограничено употребленіемъ его для счета и измѣренія". (Цицеронъ, Тускуланскія бесѣды, книга I, глава II).

Дѣйствительно, у такого утилитарнаго народа, какъ римляне, геометрія могла развиваться лишь поскольку это было нужно для удовлетворенія насущныхъ потребностей текущей жизни: для устройства военныхъ лагерей, для разграниченія и раздѣленія завоеванныхъ областей, для измѣренія полей и т. п.; она сводилась, слѣдовательно, къ землемѣрію. Но именно поэтому римскіе землемѣры, которые назывались *agrimensores* или еще иначе *gromatici*, играли важную роль. Являясь сначала посредниками и экспертами въ разрѣшеніи кадастровыхъ споровъ, они во времена имперіи составили классъ многочисленныхъ и важныхъ чиновниковъ, вербовавшихся изъ регулярныхъ школъ, спеціально для того открытыхъ. Къ концу существованія Западной имперіи общій упадокъ отразился и на ихъ познаніяхъ; но ихъ практическіе пріемы все-таки остались, и вліяніе ихъ можно прослѣдить на протяженіи всѣхъ среднихъ вѣковъ.

До послѣднихъ изслѣдованій о времени жизни Герона и до опубликованія его *Metrica* полагали вмѣстѣ съ Канторомъ, что римскіе землемѣры черпали свои познанія, главнымъ образомъ, изъ сочиненій александрійскаго ученаго. Теперь приходится отказаться отъ этого мнѣнія, и „не только потому, что традиція агрименсоровъ предшествуетъ Герону, но и потому, что она существенно отличается отъ *Metrica*" (П. Таннери). Ихъ пріемы поэтому проистекаютъ, съ одной стороны, изъ этрусскихъ источниковъ и, съ другой стороны, изъ тѣхъ же греческихъ источниковъ, изъ которыхъ было извлечено псевдогероновское собраніе.

Главныя сочиненія агрименсоровъ Фронтина, Нипса, Бальба и др., составленныя между 1-мъ и 6-мъ вѣками нашей эры, были соединены для преподаванія въ школахъ и сохранились отчасти въ первоначальномъ видѣ, но въ большей своей части они подверглись измѣненіямъ. Такой сборникъ былъ изданъ въ послѣдній разъ въ Берлинѣ въ 1848 г. Потомъ еще былъ опубликованъ въ Германіи и во Франціи *Трактатъ о землемѣріи*

Эпафродита и Витрувія Руфа, не вошедшій въ предыдущее собраніе.

Эти различныя сочиненія содержатъ преимущественно правила, относящіяся къ двумъ главнымъ вопросамъ: вычисленіе площади и объема простѣйшихъ фигуръ и тѣлъ, нанесенныхъ на поверхности земли. Изученіе этихъ сочиненій раскрываетъ довольно скудныя познанія ихъ авторовъ и представляетъ интересъ лишь съ точки зрѣнія исторіи практической геометріи.

Впрочемъ, уже къ концу существованія римской имперіи нашлось нѣсколько человѣкъ, занимавшихся теоретической математикой. Среди нихъ мы можемъ привести лишь одно замѣчательное имя, а именно Боэція (470—524). Знаменитый государственный мужъ, совѣтникъ Теодориха, осудившаго его на смерть въ жесточайшихъ мукахъ, онъ обладалъ энциклопедическими познаніями, и его сочиненія пользовались громаднымъ вліяніемъ въ теченіе среднихъ вѣковъ. Ему приписываютъ между прочимъ сочиненіе *Ars Geometriae*, содержащее переводъ условій теоремъ четырехъ первыхъ книгъ *Началъ* Евклида и выдержки изъ агрименсоровъ. Подлинность этого сочиненія, въ которомъ содержится знаменитое мѣсто, относящееся къ происхожденію нашихъ цифръ, служила и еще служитъ предметомъ живыхъ обсужденій.

БИБЛІОГРАФІЯ

F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. — *Die Schriften der Römischen Feldmesser...* Berlin, 1848, in-8°.

Cantor (Dr Moritz).—*Die römischen Agrimensoren...* Leipzig, 1875, in-8°.

Victor Mortet et Paul Tannery. — *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géometrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus...* Not. et Extr. des Mss. de la Bibl. Nat., tome 35. 2e pe, 1897.

G. Friedlein. — *Boetii, Anicii Manlii Torquati Severini... Accedit geometria quæ fertur Boetii.* Leipzig, 1867, in-8°.

§ 4.—Индусы

Геометрія въ стихахъ.

Вплоть до начала 19-го вѣка индусская наука была совершенно неизвѣстна, и когда около этого времени нѣсколько англійскихъ оріенталистовъ опубликовали переводы нѣкоторыхъ санскритскихъ сочиненій по математикѣ, это произвело впечатлѣніе настоящаго откровенія. Оказалось, что индусы были, повидимому, нашими учителями въ области числовыхъ теорій: а именно, ихъ алгебра была настолько разработана, что они умѣли разрѣшать вопросы, рѣшеніе которыхъ было найдено европейцами лишь десять столѣтій спустя.

Ихъ геометрія далеко не имѣетъ такого же научнаго значенія, какъ ихъ алгебра; во многихъ мѣстахъ въ ней ясно видны слѣды греческаго вліянія. Условія теоремъ составлены *въ стихахъ*, очень кратко, конечно, для того, чтобы ученики могли легко удержать ихъ въ памяти; нѣтъ ни опредѣленій, ни аксіомъ, ни правильныхъ доказательствъ. Если авторъ считаетъ необходимымъ дать доказательство, онъ проводитъ необходимыя вспомогательныя линіи, располагаетъ чертежъ такъ, что теорема является какъ бы самоочевидной, и прибавляетъ лишь одно слово: „Смотри!“; если нѣкоторые сравнительно сложныя задачи и разрѣшаются, то это, въ сущности, дѣлается путемъ примѣненія алгебры. Отмѣтимъ, впрочемъ, что мѣстами индусы пользуются принципомъ подобія.

Наиболѣе древнія изъ сохранившихся геометрическихъ сочиненій носятъ теологическій характеръ. Оріентировка и форма индусскихъ алтарей были предписаны традиціей. Геометрическія правила, на основаніи которыхъ выполнялись эти предписанія, содержались въ *Сульва-сутрахъ* („правила веревки“); многіе изъ этихъ сборниковъ дошли до насъ. Авторъ одного изъ нихъ Бодгайяна, повидимому, жилъ около нашей эры (по Кантору во 2-мъ вѣкѣ); онъ излагаетъ интересныя геометрическія построенія при помощи веревки.

Классическій періодъ индусской математики начинается съ Арьябхатты, родившагося въ 476 г. въ Паталипутрѣ. Его сочиненіе *Арьябхаттіямъ* дѣлится на четыре части, изъ которыхъ вторая озаглавлена: „Элементы счисленія“; остальныя три относятся къ астрономіи. Написано это сочиненіе очень лаконично; въ немъ есть нѣсколько планиметрическихъ и стереометрическихъ правилъ, изъ коихъ многія неточны.

Брахмагупта, родившійся въ 598 г., написалъ около 628 г. трактатъ по астрономіи, озаглавленный *Брахма-спхута-сиддханта* („Пересмотрѣнная система Брахмы"), 12-я и 13-я главы котораго относятся къ чистой математикѣ: первая изъ нихъ посвящена ариѳметикѣ *(Ганитад'гіайа)*, вторая — алгебрѣ (*Куттакад'гіайа*). Геометрія разсматривается, какъ часть ариѳметики; она состоитъ, главнымъ образомъ, въ числовыхъ вопросахъ, относящихся къ измѣренію площадей и объемовъ, безъ всякихъ доказательствъ. Тамъ встрѣчается, между прочимъ, формула, выражающая площадь вписаннаго четыреугольника, какъ функцію его сторонъ $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; Брахмагупта, впрочемъ, разсматриваетъ лишь частный случай, когда діагонали четыреугольника взаимно препендикулярны.

Затѣмъ, некого ужъ больше указать вплоть до Бхаскара по прозвищу Ачарья или Мудрецъ, родившагося въ 1114 г.; онъ составилъ *Сиддхантасиромани* („Увѣнчаніе системы"), большой трактатъ по астрономіи, содержащій двѣ части подъ заглавіями *Лилавати* („Очаровательная" — имя дочери Бхаскары, которой эта книга посвящена) и *Виджа-ганита*, или вычисленіе корней. Въ Лилавати трактуется ариѳметика, Виджаганита посвящена преимущественно алгебрѣ. Геометрія изложена, главнымъ образомъ, въ первой части и съ большей подробностью, чѣмъ у Брахмагупты; помимо задачъ на измѣреніе площадей и объемовъ, тамъ разбираются еще довольно многочисленные вопросы, касающіеся прямоугольныхъ треугольниковъ, съ нѣкоторыми доказательствами.

Послѣ Бхаскары мы встрѣчаемъ лишь комментаторовъ, которые вплоть до 17-го вѣка пишутъ примѣчанія къ его сочиненіямъ, не всегда хорошо понимая ихъ; индусская наука быстро угасаетъ.

БИБЛІОГРАФІЯ

Thibault. — *The Súlvasútras.* Calcutta, 1875.

Rodet. — *Leçons de calcul d'Aryabhata.* J[al] Asiat., 1[er] sem. 1879.

Colebrooke. — *Algebra with Arithmetic and Mensuration from tha Sanscrit of Brahmeyupta and Bháscara* (translated by). Londres, 1817, in-4°.

§ 5. — Арабы

Передача греческихъ сочиненій.

Цивилизація арабовъ была болѣе блестящей, чѣмъ глубокой; въ математикѣ они не прибавили ничего существеннаго къ прежнимъ открытіямъ и черпали свои познанія изъ индусскихъ и греческихъ источниковъ. И ученые ихъ принадлежали въ большинствѣ случаевъ или къ завоеваннымъ народамъ (сирійцы, персы и т. д.) или къ „невѣрнымъ" (христіане и евреи).

Арабы разрабатывали преимущественно геометрію и алгебру, въ которой они пользовались геометрическими соображеніями; въ чистой геометріи они почти что ограничивались переводомъ и комментированіемъ греческихъ сочиненій. Эти переводы были сдѣланы преимущественно въ Багдадѣ, который былъ важнѣйшимъ научнымъ центромъ, во времена династіи Абассидовъ (8-й, 9-й и 10-й вѣкъ); Альмамунъ (813 — 833) учредилъ даже съ этой цѣлью спеціальную христіанскую школу. Изъ переведенныхъ такимъ образомъ сочиненій на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ указать *Начала* Евклида.

Это былъ наиболѣе замѣчательный періодъ арабской математики. Мухаммедъ-ибнъ-Муса-Альхуаризми опубликовалъ около 820 года первое извѣстное сочиненіе по алгебрѣ, испорченное заглавіе котораго дало названіе этой наукѣ (Краткое руководство къ счисленію посредствомъ *al-djebr* и *al-mokâbalah* *)). Это сочиненіе, имѣющее съ исторической точки зрѣнія капитальную важность, было составлено по приказанію Альмамуна для потребностей практической жизни; въ немъ содержится одна глава объ измѣрительной геометріи. Мухаммедъ составилъ также, повидимому, вмѣстѣ со своими двумя братьями Ахмедомъ и Альхасаномъ, сочиненіе по геометріи, дошед-

*) Al-djebr — „возстановленіе" — обозначаетъ перенесеніе отрицательныхъ членовъ изъ одной части уравненія въ другую; al-mokâbalah — „противоположеніе" — есть отбрасываніе отъ обѣихъ частей уравненія равныхъ членовъ. Отъ al-djebr и произошло названіе алгебры. Ср. Кэджори, *Исторія элементарной математики*, стр. 112 русскаго изданія. *Прим. перев.*

шее до насъ въ латинскомъ переводѣ подъ заглавіемъ *Liber trium fratrum de geometria* (Книга трехъ братьевъ о геометріи).

Одинъ изъ славнѣйшихъ арабскихъ астрономовъ Абу'ль-Уафа (940 — 998) является авторомъ прекраснаго *Сборника геометрическихъ построеній.* Магометъ изъ Багдада (10-й вѣкъ) составилъ *Трактатъ о дѣленіи поверхностей,* скопированный съ сочиненія Евклида на ту же тему; Гассанъ-бенъ-Гайтемъ написалъ (около 1009 г.) *Трактатъ о геометрическихъ данныхъ,* аналогичный *Data* греческой геометріи. Наконецъ, Нассиръ-Эддинъ (1201 — 1274) оставилъ намъ интересный комментарій къ *Началамъ* Евклида.

Начиная съ 13-го вѣка, математика на востокѣ приходитъ въ полный упадокъ. Въ испанской школѣ, которая по своему значенію далеко отстаетъ отъ багдадской, нельзя привести ни одного замѣчательнаго имени.

Въ общемъ, кромѣ трактата Абу'ль-Уафа арабы не дали никакихъ оригинальныхъ работъ по геометріи.

БИБЛІОГРАФІЯ

Mohammed ben Musa. — *Algebra.* Édition Rosen. Londres, 1831, in-8°.

A. Marre. — *Le Messâhat de Mohammed ben Moussa Al Khârizmi extrait de son Algèbre* (traduit et annoté par). — Annali di Matematica, vol. 7. Roma, 1865.

M. Curtze. — *Der liber trium fratrum de geometria.* Nova Acta Acad. Gæs. Leop.-Carol.-Germ. naturæ Curiosorum, Band 49. Halle, 1887.

F. Woepcke. — *Analyse ei extraits d'un recueil de constructions géométriques d'Aboûl Wafâ.* Jal Asiat., 1er sem. 1855.

David Gregory. — *Euclidis quæ supersunt omnia.* Oxford, 1703, in-fol. (Содержитъ латинскій переводъ *Трактата о дѣленіи поверхностей* Магомета изъ Багдада).

§ 6. — Латинскій западъ въ средніе вѣка

I періодъ (5 — 12-й вѣка).

Научное невѣжество.

Отъ паденія римской имперіи до начала 12-го вѣка латинскій западъ былъ погруженъ въ глубокое невѣжество. Творенія грековъ въ это время неизвѣстны, и даже сочиненія агрименсоровъ очень мало распространены. Въ частности геометрія находилась въ совершенномъ загонѣ: она была отнесена въ *quadrivium* (1) вмѣстѣ съ ариѳметикой, музыкой и астрономіей, и то немногое, что изъ нея знали, сводилось къ нѣсколькимъ опредѣленіямъ и содержанію нѣкоторыхъ теоремъ безъ доказательствъ.

Тѣ элементарныя научныя знанія, которыя еще уцѣлѣли, сохранялись въ монастыряхъ. Три наиболѣе замѣчательныхъ ума этого темнаго періода — англо-саксонцы Беда и Алькуинъ и французъ Гербертъ — принадлежатъ къ духовенству.

Беда (672 — 735) написалъ очень много сочиненій, изъ коихъ нѣкоторыя относятся къ ариѳметикѣ, геометріи и астрономіи. Ему приписывали *Propositiones ad acuendos juvenes* (Задачи для изощренія юношества), сборникъ задачъ, изъ котораго, по всей вѣроятности, развились позднѣйшія сочиненія о математическихъ развлеченіяхъ и въ которомъ содержится нѣсколько вопросовъ практической геометріи; но нѣкоторыя указанія заставляютъ предполагать, что авторомъ этого сочиненія былъ Алькуинъ.

Учитель и другъ Карла Великаго Алькуинъ (735—804), бывшій также ученикомъ Беды, имѣлъ значительное вліяніе на современниковъ. Онъ старался развить вкусъ къ занятіямъ наукой у монаховъ и учредилъ многочисленныя школы при монастыряхъ и соборахъ.

Но если кто дѣйствительно можетъ претендовать на званіе возстановителя наукъ на западѣ, то это — Гербертъ (около 930—1003). Онъ родился въ Оверни, поступилъ въ монахи, учился въ Испаніи, сталъ реймскимъ, а затѣмъ равенскимъ архіепископомъ и, наконецъ, папой подъ именемъ Сильвестра II. Своими познаніями, правда, очень элементарными, онъ настолько превосходилъ современниковъ, что эти послѣдніе обвиняли его въ занятіяхъ магіей. Онъ посвятилъ обученію значительную часть своей жизни и пріобрѣлъ благодаря этому большую из-

---

(1) Въ противоположность *trivium*'у, куда входили грамматика, діалектика и реторика.

вѣстность. Кромѣ того, онъ собралъ нѣкоторыя сочиненія, оставленныя римлянами, и его авторитетъ обезпечилъ имъ распространеніе.

Гербертъ написалъ нѣсколько математическихъ сочиненій и между прочимъ *Libellus Geometriae,* не дошедшій до насъ. Подъ его именемъ существуетъ еще, хотя его авторство здѣсь и сомнительно, одна *Geometria,* состоящая изъ трехъ отдѣльныхъ частей, написанныхъ, по всей вѣроятности, различными авторами. Первая часть, наиболѣе оригинальная, есть незаконченная попытка методическаго изложенія геометріи; во второй рѣшаются различныя ариѳметическія задачи; наконецъ, третья имѣетъ предметомъ вычисленіе длинъ, площадей и объемовъ. Ядромъ этой послѣдней части и послужилъ, быть можетъ, только-что упомянутый *Libellus.*

Въ теченіе 11-го вѣка импульсъ, вызванный Гербертомъ, пріостанавливается, и лишь въ началѣ 12-го вѣка мы видимъ, какъ пробивается настоящее научное теченіе подъ вліяніемъ испанскихъ саррацинъ. Ателардъ изъ Бата (около 1115 г.) и Герардъ изъ Кремоны (1114—1187) перевели *Начала* Евклида съ арабскаго текста.

II періодъ (отъ 13-го вѣка до середины 15-го вѣка).

Вліяніе арабовъ.

Около начала 13-го вѣка появляются сочиненія великаго математика среднихъ вѣковъ Леонардо изъ Пизы, называемаго также Фибоначчи. Онъ жилъ сначала въ Бужи, гдѣ его отецъ служилъ въ пизанской конторѣ, путешествовалъ по востоку и вернулся въ Пизу. Онъ написалъ въ 1202 г. свой знаменитый *Liber Abaci,* который содержитъ самостоятельное изложеніе познаній арабовъ въ ариѳметикѣ и алгебрѣ и образуетъ основу математическихъ сочиненій Ренессанса.

Независимо отъ *Liber Abaci* и важныхъ сочиненій по алгебрѣ Фибоначчи составилъ еще опубликованную въ 1220 году *Practica Geometria.* Въ это сочиненіе входитъ все, что имѣется у Евклида и Архимеда относительно измѣренія площадей и объемовъ, и, сверхъ того, раздѣленіе плоскихъ фигуръ въ данномъ отношеніи, различные землемѣрные пріемы и элементарная часть тригонометріи. Данныя въ задачахъ всѣ — численныя; доказательства, въ которыхъ онъ пользуется и алгеброй, строги и изложены очень ясно. Въ общемъ Леонардо изъ Пизы былъ истиннымъ математикомъ, далеко превзошедшимъ всѣхъ предшествовавшихъ ему и послѣдовавшихъ за нимъ въ теченіе среднихъ вѣковъ. Тѣмъ не менѣе труды его распространялись лишь съ крайней медленностью.

Послѣ него — новый упадокъ. Намъ придется отмѣтить лишь нѣсколько выдающихся умовъ, которые въ болѣе благопріятной средѣ навѣрно могли бы создать и болѣе интересныя вещи.

Наибольшее вліяніе на умственное развитіе въ концѣ среднихъ вѣковъ имѣлъ Iordanus Nemorarius или Iordanus изъ Саксоніи, который въ 1222 г. былъ избранъ генераломъ доминиканцевъ, ордена, посвятившаго себя обученію. Написанныя имъ различныя математическія сочиненія имѣютъ нѣкоторое значеніе; они быстро распространились въ школахъ и въ теченіе долгаго времени переиздавались и комментировались; авторитетъ, которымъ онъ пользовался у своихъ современниковъ, былъ, между прочимъ, одной изъ причинъ, затруднившихъ распространеніе сочиненій Фибоначчи въ университетахъ. Iordanus'у принадлежитъ цѣнное сочиненіе *De Triangulis,* состоящее изъ четырехъ книгъ. Въ первыхъ двухъ рѣчь идетъ о прямолинейныхъ фигурахъ; въ двухъ послѣднихъ — о кругѣ и линіяхъ, стоящихъ въ близкой связи съ нимъ; вторая книга въ частности посвящена дѣленію фигуръ.

За нимъ слѣдуетъ Campanus изъ Новары (конецъ 13-го вѣка), извѣстный въ особенности, какъ авторъ перваго напечатаннаго латинскаго перевода *Началъ* Евклида. Отмѣтимъ мимоходомъ анонимный *Трактатъ по геометріи,* составленный въ царствованіе Филиппа Смѣлаго (1270—1285) и найденный Анри. Существенная заслуга этого небольшого сочиненія заключается въ томъ, что это — первая работа подобнаго рода, написанная на французскомъ языкѣ; въ ней заключаются нѣкоторыя планиметрическія и стереометрическія правила. Укажемъ еще, какъ на аналогичное сочиненіе, на интересную *Practica geometria*, авторомъ которой является Dominicus de Clavasio (или Dominicus Parisiensis), выдающійся для своего времени математикъ, бывшій астрологомъ при французскомъ дворѣ во второй половинѣ 14-го вѣка.

Затѣмъ намъ приходится опять вернуться къ духовенству. Брадвардинъ (1290—1348), архіепископъ въ Кэнтербери, написалъ книгу *Geometria speculativa*, которая содержитъ интересныя теоремы о звѣздчатыхъ многоугольникахъ и объ изопериметрическихъ фигурахъ. Наиболѣе замѣчательный изъ пріемниковъ Фибоначчи, Николай Оремъ, открытія котораго были отмѣчены нѣмецкимъ ученымъ Курце, умеръ епископомъ въ Лизье въ 1382 г.; въ своемъ *Tractatus de latitudinibus formarum* Оремъ изложилъ принципъ открытаго впослѣдствіи Декартомъ способа изображать графически отношеніе, существующее между двумя перемѣнными величинами при помощи ординаты *(latitudo)* и абсциссы *(longitudo)*. Наконецъ, кардиналъ Николай Кузанскій, покровитель математиковъ, прославился своими многочисленными попытками найти квадратуру круга.

БИБЛІОГРАФІЯ

Bède. — *De Arithmeticis propositionibus*. Patrologie latine de Migne, tome 90, col 665. Paris, 1850.

Alcuin. — *Propositiones Alcuini... ad acuendos juvenes*. Patrologie latine de Migne, tome 101, col. 1143. Paris, 1851.

Gerbert. — *Opera mathematica*. Édition Bubnov. Berlin, 1899, in-8°.

B. Boncompagni. — *Scritti di Leonardo Pisano...* Roma, 1857-62.

Jordanus Nemorarius. — *De Triangulis*. Édition Curtze. Mitteil. des Coppernicusvereins für Wissensch. u. Kunst. Thorn, 1887.

Ch. Henry. — *Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie*. Bulletino di Bibliografia... (Boncompagni). Roma, 1882.

Bradwardin. — *Geometria speculativa*. Paris, 1495 ou 1505, in-fol.

Oresme. — *De latitudine formarum*. Édition Curtze. Zeitsch. für Math. u. Physik. Leipzig, 1868.

Cusanus. — *Opera*. Bâle, 1565, in-fol.

КАРЛЪ ФРИДРИХЪ ГАУССЪ

§ 7. Новое время

I періодъ: Ренессансъ (отъ середины 15-го до конца 16-го вѣка).

Соединеніе алгебры и геометріи.

Послѣ средневѣковаго застоя начинается общее пробужденіе научной дѣятельности. Византійцы, изгнанные изъ Константинополя турками, ищутъ убѣжища на западѣ и привозятъ туда сочиненія александрійскихъ геометровъ въ ихъ первоначальномъ видѣ. Въ частности, впервые появляются сочиненія Архимеда (1543 г.) и Аполлонія (1537 г.), переведенныя съ греческаго. Эти изданія даютъ живой толчекъ къ занятіямъ математикой.

Среди наиболѣе славныхъ переводчиковъ мы укажемъ на нѣмецкаго астронома Мюллера, называемаго также Regiomontanus (1436 — 1476), который самъ управлялъ въ Нюренбергѣ типографіей, гдѣ были выполнены прекрасныя изданія греческихъ математиковъ. Сициліанецъ Мавролико (1494—1575) оставилъ, помимо своихъ собственныхъ изслѣдованій, переводъ коническихъ сѣченій Аполлонія и интересное изложеніе Архимеда. Въ особенности же итальянцу Коммандино (1509—1575) Европа обязана драгоцѣнными переводами александрійскихъ геометровъ, снабженными замѣчательными комментаріями.

Во всякомъ случаѣ, истинная характеристика этого періода заключается въ томъ, что соединеніе геометріи и алгебры, начатое индусами, арабами и средневѣковыми учеными, становится все болѣе тѣснымъ и въ 17-мъ вѣкѣ приводитъ къ созданію аналитической геометріи и исчисленія безконечно малыхъ.

Въ 1494 году появляется *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* итальянскаго францисканца Луки Пачіуоло, извѣстнаго также подъ именемъ Lucas di Burgo (род. въ 1445 г., умеръ послѣ 1514 г.). Это сочиненіе состоитъ изъ двухъ отдѣловъ, относящихся одинъ къ ариѳметикѣ и алгебрѣ, другой къ геометріи. Этотъ послѣдній содержитъ восемь частей, трактующихъ объ измѣреніи площадей и объемовъ, о дѣленіи фигуръ и о различныхъ вопросахъ землемѣрія; геометрическія задачи часто рѣшаются съ помощью алгебры на числовыхъ данныхъ. Въ *Summa* приходится констатировать многочисленныя заимствованія изъ сочиненій Леонардо Пизанскаго, работы котораго такимъ образомъ стали извѣстны геометрамъ; но копія ниже оригинала, какъ по формѣ, такъ и по содержанію. Какъ бы то ни было, это сочиненіе оказало всетаки могучее содѣйствіе развитію математики въ 16-мъ вѣкѣ. Пачіуоло является еще авторомъ любопытнаго сочиненія, озаглавленнаго *De divina proportione* (1509 г.), гдѣ онъ излагаетъ многочисленныя приложенія дѣленія прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи къ различнымъ искусствамъ.

Подобно Пачіуоло математики Ренессанса постоянно примѣняютъ алгебру къ геометріи и наоборотъ. Мы находимъ это, въ частности, у итальянскихъ ученыхъ Кардано (1501—1576) и Тартальи (1505—1557), которымъ алгебра обязана значительнымъ прогрессомъ и ссоры которыхъ стали знамениты въ исторіи. Главное сочиненіе Тартальи *General Trattato di numeri et misure* (1556—1560) дѣлится на 6 частей, изъ которыхъ четыре послѣднихъ посвящены геометріи и содержатъ интересные вопросы; его упрекаютъ, впрочемъ, въ многочисленныхъ неточностяхъ.

Такимъ образомъ, мы доходимъ до француза Франсуа Віета (1540—1603), который создалъ буквенную алгебру и этимъ далъ возможность осуществить полное соединеніе геометріи и алгебры. Дѣйствительно, до тѣхъ поръ, какъ мы это и отмѣчали, геометрическія доказательства, проведенныя въ алгебраической формѣ, были основаны на числовыхъ данныхъ, и это не могло быть иначе, такъ какъ сама алгебра была исключительно числовой наукой. Разсужденіе выигрывало такимъ образомъ въ удобствѣ и быстротѣ, но въ то же время теряло въ общности, которую мы встрѣтили у грековъ. Употребленіе символовъ позволило сохранить за геометріей общность, пользуясь въ то же время всѣми удобствами счисленія.

Віета не удовлетворился созданіемъ современной алгебры; онъ примѣнилъ ее и къ геометріи. Онъ занялся систематически въ своихъ *Effectiones geometricae* (1593 г.) и въ *Supplementum Geometriae* (1593 г.) алгебраическимъ рѣшеніемъ геометрическихъ задачъ и въ то же время геометрическимъ построеніемъ алгебраическихъ формулъ. Кромѣ того, мы обязаны Віету въ другой уже области возстановленіемъ потеряннаго сочиненія Аполлонія *О касаніяхъ (Des Contacts)*, которое онъ опубликовалъ въ 1600 г. подъ псевдонимомъ Apollonius Gallus; онъ рѣшаетъ въ немъ трудную для его времени задачу проведенія окружности, касательной къ тремъ даннымъ окружностямъ.

Отмѣтимъ еще, какъ работы въ области приложенія алгебры къ геометріи, краткіе очерки Кеплера (1571—1631) о звѣздчатыхъ многоугольникахъ въ его безсмертномъ твореніи *Harmonices Mundi* (1619 г.).

Итальянскіе математики Ренессанса увлекались геометрическими построеніями, выполняемыми однимъ раствореніемъ циркуля *).

Равнымъ образомъ они занимались и приближенными геометрическими построеніями. Въ этомъ отношеніи слѣдуетъ отмѣтить: великаго итальянскаго художника Леонардо да Винчи (1452—1519), указавшаго въ своихъ рукописяхъ значительное число приближенныхъ построеній, которыя, впрочемъ, онъ, повидимому, считалъ точными; небольшое анонимное сочиненіе конца 15-го вѣка *Geometria deutsch;* и, наконецъ, сочиненіе знаменитаго нѣмецкаго живописца и художника-гравера Альбрехта Дюрера (1471—1528), подъ заглавіемъ *Underweysung der messung mit dem zirkel und richscheyt* (Наставленіе къ измѣренію циркулемъ и линейкой) (1525 г.). Но въ отличіе отъ Винчи Дюреръ зналъ, что его построенія не точны.

---

*) Построенія, выполняемыя однимъ только циркулемъ, носятъ названіе построеній Маскерони, въ честь итальянскаго геометра Маскерони, который показалъ, что всякая геометрическая задача на построеніе, разрѣшимая при помощи циркуля и линейки, разрѣшима также при помощи одного циркуля. См. Адлеръ. *Теорія геометрическихъ построеній*. Одесса, 1910. Глава III. *Прим. ред.*

Наконецъ, въ эту же эпоху было опубликовано много сочиненій по практической геометріи, изъ которыхъ мы отмѣтимъ прекрасное сочиненіе германскаго іезуита Клавіуса (1537–1612), извѣстнаго также хорошимъ изданіемъ *Началъ* Евклида, и голландца Симона Стевина (1548—1620).

БИБЛІОГРАФІЯ

Lucas de Burgo. — *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita.* Venise, 1494, in-fol.

Lucas de Burgo. — *De divina proportione.* Venise, 1509, in-fol.

Ch. Ravaisson-Mollien. — *Les Manuscrits de Léonard de Vinci* (Trad. franç. par) Paris, 1881-1891, 6 in-fol.

Geometria deutsch.— Édition Günther. Zeitsch. für Math. u. Phys. Leipzig, 1875.

Albrecht Dürer. — *Underweysung der messung mit dem zirkel und richscheyt.* Nuremberg, 1525.

Nicolo Tartaglia. — *General Trattato di numeri et misure.* Venise, 1556-1560, in-fol.

François Viete. — *Opera mathematica.* Édition Schooten. Leyde, 1646, in-fol.

Clavius. — *Opera mathematica.* Mayence, 1612, in-fol.

Simon Stevin.— *Œuvres mathématqiues.* Édition Albert Girard. Leyde, 1634, in-fol.

Kepler. — *Harmonices mundi, libri V.* Linz, 1619, in-fol.

II періодъ (отъ 17-го до 19-го вѣка).

Измѣненіе формы греческой геометріи.

Съ 17-мъ вѣкомъ начинается новая эра въ исторіи математики. Созданіе аналитической геометріи Декартомъ (1637 г.), изобрѣтеніе счисленія безконечно малыхъ Ньютономъ и Лейбницемъ (2-я половина 17-го вѣка) открыли обширное поле для умозрѣнія, богатое зачатками важныхъ открытій.

Около двухъ столѣтій чистая геометрія была почти совершено оставлена. Впрочемъ, нѣсколько ученыхъ, какъ, напримѣръ, Паскаль, Дезаргъ, Гюйгенсъ, Ла-Гиръ, продолжаютъ еще

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧЪ ЛОБАЧЕВСКІЙ

заниматься ею; они подготовляютъ появленіе въ началѣ 19-го вѣка того, что было названо высшей геометріей, и гдѣ должны были выдѣлиться между прочими Монжъ, Карно, Понсле и Шаль.

Что касается, въ частности, элементарной геометріи, ничего важнаго нельзя отмѣтить вплоть до самаго конца 18-го вѣка. Единственныя оригинальныя написанныя въ этотъ періодъ работы, о которыхъ стоитъ упомянуть, суть *Cours mathématique* Пьера Геригона (I половина 17-го вѣка), опубликованный въ 1644 г., и *Characteristica Geometria* великаго нѣмецкаго ученаго и философа Лейбница (1646—1716), составленная въ 1679 г., но не опубликованная въ то время. Эти два сочиненія, въ которыхъ приведены обозначенія, имѣющія цѣлью упрощеніе языка и облегченіе геометрическихъ разсужденій, являются первыми извѣстными попытками того, что теперь называется „математической логикой“.

Въ теченіе 19-го вѣка геометры занялись интересными изслѣдованіями и въ частности удѣлили много вниманія геометрическимъ построеніямъ. Древніе ставили условіемъ для своихъ графическихъ построеній пользованіе только циркулемъ и линейкой. Теперь стали изощряться въ изысканіи способовъ выполненія этихъ построеній при помощи одной только линейки, или одного только циркуля, или какими-нибудь другими способами; затѣмъ стали изучать степень простоты и точности этихъ построеній *).

Кромѣ того, въ истекшемъ вѣкѣ математики направили свои усилія на изученіе аксіомъ, служащихъ основаніемъ геометріи**).

---

*) См. вышеупомянутое сочиненіе Адлера *Теорія геометрическихъ построеній*, гдѣ также изложены доказательства невозможности нѣкоторыхъ построеній при помощи тѣхъ или иныхъ инструментовъ, напримѣръ, доказательство невозможности трисекціи угла при помощи циркуля и линейки. *Прим. ред.*

**) Классическими въ этой области являются работы Гаусса, Лобачевскаго, Больэ, Римана, Бельтрами, проложившими новые пути въ геометріи. См. В. Каганъ. *Основанія геометріи.* Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи. Одесса, 1907; а также Роберто Бонола. *Неевклидова геометрія.* СПБ., 1910. *Прим. ред.*

Наконецъ, съ 1873 г. „геометрія треугольника“ стала предметомъ важныхъ изслѣдованій со стороны многочисленныхъ геометровъ, среди которыхъ на первомъ мѣстѣ нужно упомянуть во Франціи Лемуана и Брокара, въ Бельгіи Нейберга.

Въ заключеніе удовольствуемся нѣсколькими словами о модификаціяхъ, которымъ подверглись трактаты по элементарной геометріи, начиная съ 17-го вѣка до нашихъ дней.

Вплоть до середины 17-го вѣка теоретическая геометрія преподавалась исключительно по *Началамъ* Евклида въ ихъ первоначальномъ видѣ, т. е. при помощи исключительно геометрическихъ доказательствъ. Параллельно съ изданіями твореній греческаго геометра публикуются многочисленныя сочиненія по „практической“ геометріи, гдѣ наряду съ вопросами, не разсмотрѣнными въ *Началахъ*, напримѣръ, объ измѣреніи круга, изложены числовыя задачи по планиметріи и стереометріи.

Первый человѣкъ, нанесшій во Франціи ударъ неоспоримому до тѣхъ поръ авторитету Евклида, былъ знаменитый Антуанъ Арно (1612—1692), одинъ изъ авторовъ логики Port-Royal'я, опубликовавшій въ 1667 г. свои *Nouveaux Elemens de Geometrie*. „Автору новой логики или искусства мыслить,— говоритъ Николь, написавшій предисловіе къ этому сочиненію,— не составило труда замѣтить... недостатки метода Евклида и улучшить его для того, чтобы геометрія могла быть лучшимъ образомъ усвоена“. Арно излагаетъ содержаніе плоской геометріи *Началъ* въ порядкѣ, отличающемся отъ евклидовскаго, но почти соотвѣтствующемъ тому, который принятъ и въ наше время; нужно сказать, что онъ не всегда былъ счастливъ въ своихъ попыткахъ реформировать Евклида. Его сочиненіе особенно характеризуется введеніемъ всюду, гдѣ это только возможно, алгебраическихъ доказательствъ; затѣмъ въ этомъ сочиненіи нѣтъ ужъ болѣе тѣхъ утомительныхъ повтореній условія, которыя мы отмѣтили у древнихъ; оно читается гораздо легче, чѣмъ *Начала*, и потому долго оставалось образцомъ, которому слѣдовали позднѣйшіе авторы.

Въ 1685 г. Р. П. Бернаръ Лами (1640—1715), священникъ монашескаго ордена, опубликовываетъ *Elemens de Geometrie*, построенные по тому же плану, что и у Арно; въ нихъ содержится между прочимъ то, что мы называемъ теперь геометріей пространства, а также измѣреніе круга, хотя и безъ опредѣленія π. Эта маленькая книжка, ясно и кратко написанная, очень цѣнилась въ свое время.

Мы должны упомянуть о книгѣ *Geometrie elementaire et pratique* Совера (1653—1716), появившейся въ концѣ 17-го вѣка и переизданной въ 1753 г. Леблондомъ. Расположеніе скопировано еще съ сочиненія Арно, но здѣсь впервые появляются теоремы практическаго характера относительно измѣренія поверхностей и объемовъ, напримѣръ, слѣдующая: „Площадь круга равна половинѣ произведенія длины его окружности на радіусъ". Во всякомъ случаѣ, доказательства, которыя онъ даетъ этимъ теоремамъ, основаны на ученіи о недѣлимыхъ и далеко не точны.

Укажемъ мимоходомъ на геометрическую часть въ *Élemens de Mathématiques* Вариньона (1654—1722), опубликованныхъ въ 1731 г. и содержащихъ нѣкоторыя интересныя приближенныя построенія, и *Élemens de Geometrie* Клэро (1713—1765), появившіеся въ 1741 г., въ которыхъ авторъ въ превосходномъ изложеніи пытается сдѣлать изученіе геометріи болѣе привлекательнымъ, выводя геометрическія истины изъ наглядныхъ фактовъ.

Наконецъ, въ 1794 г. появляются замѣчательные *Élements de Geométrie* Лежандра (1752—1833), имѣвшіе съ момента появленія громадный успѣхъ; эта книга стала классической въ теченіе больше, чѣмъ столѣтія, и до сихъ поръ еще служитъ во Франціи основой всѣхъ сочиненій по элементарной геометріи. Лежандръ излагаетъ въ ней въ томъ же порядкѣ, какъ это дѣлается и теперь, содержаніе *Началъ* Евклида, планиметрію и стереометрію вмѣстѣ съ практичесими теоремами, измѣреніе круга вмѣстѣ съ опредѣленіемъ π; наконецъ, онъ вводитъ еще свойства сферическихъ треугольниковъ. Онъ значительно превосходитъ своихъ предшественниковъ въ строгости доказательства, хотя ему, съ другой стороны не всегда удаются его попытки къ уменьшенію числа принциповъ по сравненію съ тѣмъ, что допускалось греческими геометрами. Его упрекали въ слишкомъ частомъ пользованіи доказательствами отъ противнаго, но это было послѣдствіемъ условія, которое онъ самъ себѣ поставилъ, а именно — не употреблять метода предѣловъ, который онъ считалъ недостаточно простымъ для такого рода сочиненія.

Съ Лежандромъ элементарная геометрія окончательно приняла ея нынѣшнюю форму; его послѣдователи измѣняли лишь нѣкоторыя детали. Заканчивая этотъ очеркъ, мы должны, впрочемъ, отмѣтить, что и во Франціи и въ другихъ странахъ, въ особенности въ Италіи, начинаетъ обнаруживаться новая тенденція въ преподаваніи, а именно — вести одновременно изложеніе какъ плоской геометріи, такъ и геометріи пространства, которыя въ настоящее время, какъ и у Евклида, совершенно отдѣляются другъ отъ друга. Эта идея, высказанная въ 1826 г. Жергонемъ, была осуществлена Магистромъ въ 1844 г. и еще разъ Ш. Мерэ въ 1874 г.

БИБЛІОГРАФІЯ

Pierre Herigone. — *Cours mathematique,* tome I. Paris, 1634, in-8°.

Antoine Arnauld. — *Nouveaux Elemens de Geometrie.* Paris, 1667, in-4°.

R. P. Bernard Lamy. — *Les Elemens de Geometrie.* Paris, 1685, in-12.

Sauveur, revu par Le Blond. — *Géométrie élémentaire et pratique.* Paris, 1753, in-4°.

Varignon. — *Élémens de mathématique.* Paris, 1731, in-4°.

Clairaut. — *Élémens de géométrie.* Paris, 1741, in-8°.

Adrien-Marie Legendre. — *Éléments de Géométrie.* Paris, 1794, in-8°.

A. Mahistre. — *Les Analogies de la Géométrie élémentaire* ou la *Géométrie dans l'espace ramenée à la Géométrie plane.* 2e. edit., Paris, 1844.

Ch. Méray. — *Nouveaux Éléments de Géométrie.* Dijon, 1874 и 1903. in-8°.